

WASSERPEGEL- MESSUNGEN MITTELS DRUCKSONDEN

**Verfasser: Beat Gilgen, stud. phil. nat.
Datum: 17. März 1997**

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	3
1.1. Wasser als endliche Ressource	3
2. Physikalische Abhängigkeiten	3
2.1. Messprinzip	3
2.2. Dichte des Wassers	4
2.2.1. Normalwert	4
2.2.2. Temperatureinfluss	4
2.2.3. Wasserqualität	5
2.2.3.1. Salze	5
2.2.3.2. Löss	5
2.2.3.3. Sand und Erde	5
2.2.4. Kompressibilität	5
2.3. Fallbeschleunigung	6
2.3.1. Geographische Lage	7
2.3.2. Lage über dem Meeresspiegel	8
3. Nichtreproduzierbare Messfehler	9
3.1. Wassertemperatur	9
3.2. Wasserqualität	9
4. Beispiele	9
4.1. Vergleich Basel - Lugano	9
4.2. Vergleich Oberaarsee- Brienzersee	10
5. Quellen	11

1. EINFÜHRUNG

1.1. Wasser als endliche Ressource

Heute werden unter anderem Druckmesssonden verwendet, um den Wasserpegel zu messen. Diese Sonden haben verschiedene Vorteile gegenüber anderen Messverfahren. Speziell zu erwähnen sind die einfache Montierbarkeit, da sie lageunabhängig sind und deshalb keine grossen baulichen Massnahmen erfordern, sowie die Wartungsfreiheit und die grosse Genauigkeit und Auflösung.

Um aber die oft geforderte Auflösung von einem Millimeter auch mit der entsprechenden Genauigkeit zu messen, müssen die diversesten Störfaktoren ermittelt und wenn möglich eliminiert werden. Die folgende Arbeit soll Aufschluss über die Zusammenhänge und Einflüsse bei der Messung von Wasserpegeln mittels Drucksonden geben. Am Schluss sind einige Beispiele angeführt, welche als Interpretationshilfe gedacht sind.

2. PHYSIKALISCHE ABHÄNGIGKEITEN

2.1. Messprinzip

Wie der Name der Sonden schon sagt, wird zum Messen des Wasserpegels der Wasserdruck verwendet. Das heisst, es wird nicht der Pegel an und für sich, sondern der Parameter "Druck" gemessen und mittels physikalischer Konstanten auf den Wasserpegel umgerechnet.

Mit Druck wird bezeichnet:

$$\text{Druck} = \text{Kraft} / \text{Fläche}$$

$$p = F_g / A$$

$$F_g = m * g$$

Es ist hier noch anzumerken, dass unter Druck in unserem Fall immer der Schweredruck verstanden wird.

Wenn

p	Druck in [Pa = kg / s ² m]
ρ	Dichte des Wassers in [kg / m ³]
g	Fallbeschleunigung in [m / s ²]
h	Höhe des Wassers in [m]

$$p = \rho * g * h$$

Die Formel verdeutlicht, dass der Druck linear mit dem Pegel ansteigt, was uns sehr zugute kommt, da somit keine Linearisierung der Pegelfunktion notwendig ist.

Die Beziehung zwischen Pegel (Wasserhöhe) und Druck ist somit:

$$h = p / \rho * g$$

Es zeigt sich hier, dass der Umweg über den Druck ein gangbares Mittel ist. Es ist jedoch nicht so einfach, wie uns die obigen Formeln glaubhaft machen wollen. Die verwendeten Parameter sind nicht Konstanten. Die genauen Beziehungen werden nun noch beschrieben.

2.2. Dichte des Wassers

2.2.1. Normalwert

Die Dichte r von Wasser hängt von verschiedenen Parametern ab. Im Normalfall wird der Wert 1000 kg / m^3 (1.000 g / cm^3) verwendet. Dieser Wert ist aber nur bedingt brauchbar und für die Pegelmessung zu ungenau.

Der exakte Wert wird beschrieben durch [KUCH88]:

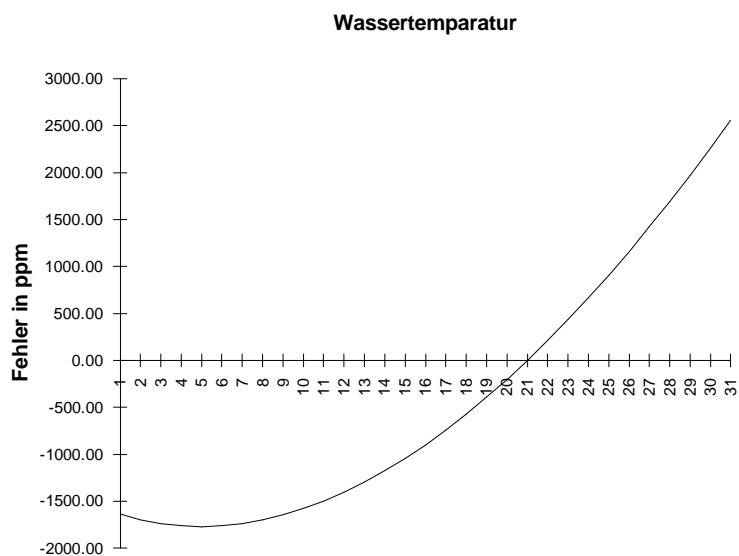
$$r = 998.206 \text{ kg / m}^3$$

$$@ t = 20 \text{ }^\circ\text{C} , p_n = 1013.25 \text{ kPa}$$

2.2.2. Temperatureinfluss

Der Temperatureinfluss auf die Dichte ist ein entscheidender. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Anomalität des Wassers. Dies, weil die Dichte mit der Temperatur nicht wie bei anderen Stoffen linear abnimmt. Im folgenden sind die Dichten in dem relevanten Temperaturbereich tabelliert [KUCH88].

Dichte von reinem Wasser			
t	r	Fehler	Fehler bei 4m
[°C]	[kg / m ³]	[ppm]	[mm]
0	999.840	-1636.94	-6.55
1	999.899	-1696.04	-6.78
2	999.940	-1737.12	-6.95
3	999.964	-1761.16	-7.04
4	999.972	-1769.17	-7.08
5	999.964	-1761.16	-7.04
6	999.940	-1737.12	-6.95
7	999.902	-1699.05	-6.80
8	999.849	-1645.95	-6.58
9	999.781	-1577.83	-6.31
10	999.700	-1496.69	-5.99
11	999.605	-1401.51	-5.61
12	999.498	-1294.32	-5.18
13	999.378	-1174.11	-4.70
14	999.245	-1040.87	-4.16
15	999.101	-896.61	-3.59
16	998.944	-739.33	-2.96
17	998.776	-571.02	-2.28
18	998.597	-391.70	-1.57
19	998.407	-201.36	-0.81
20	998.206	0.00	0.00
21	997.994	212.38	0.85
22	997.772	434.78	1.74
23	997.540	667.20	2.67
24	997.299	908.63	3.63
25	997.047	1161.08	4.64
26	996.786	1422.55	5.69
27	996.516	1693.04	6.77
28	996.236	1973.54	7.89
29	995.948	2262.06	9.05
30	995.650	2560.59	10.24



2.2.3. Wasserqualität

Ebenfalls einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Dichte hat die Qualität des Wassers. Namentlich zu erwähnen sind folgende Stoffe:

Gelöste Stoffe:	Schwebefracht:
- Salze	- Löss
- Sauerstoff	- Sand und Erde (nach Gewittern)

Die hier aufgeführten Störfaktoren sind sehr schwierig zu bemessen, wenn nicht unmöglich. Diese müssen experimentell ermittelt werden.

2.2.3.1. Salze

Ein Liter Wasser kann bei 20°C bis zu 360g Steinsalz, 2.5g Gips oder in Verbindung mit CO₂ 1g Kalk (bei tieferen Temp. sogar mehr Kalk) lösen [RICKLI90].

In der Schweiz sind ausschliesslich die Süssgewässer interessant. Diese weisen einen hohen Gehalt an Carbonaten und nur sehr geringe Konzentration von Chloriden auf [JOGER89]. So hat z.B. das Trinkwasser der Stadt Bern (Breitenrain) eine Härte von ca. 10,5 °dH [Wasserwerke Bern], was 105mg CaO pro Liter entspricht.

Da sich die Dichte einer Lösung zusammensetzt aus den Dichten der beteiligten Stoffe ergibt sich für den oben erwähnten Fall:

Wenn	
ρ Kalk	2700 kg / m ³
ρ Wasser	998.206 kg / m ³

$$(998.206 \text{ kg} + 0.105\text{kg}) / (1\text{m}^3 + (0.105\text{kg} / 2700 \text{ kg} / \text{m}^3)) = 998.2722 \text{ kg} / \text{m}^3 = 66 \text{ ppm}$$

Der Fehler in diesem Fall ist also vernachlässigbar. Es ist aber zu berücksichtigen, dass unsere Gewässer zunehmend überdüngt sind, was einen hohen Nitrat- und ebenfalls hohen Phosphatgehalt aufweisen. Zudem wird teilweise ein hoher Salzgehalt festgestellt.

Kummulativ muss somit mit einer nicht zu vernachlässigbaren Verschiebung der Dichte gerechnet werden, vor allem in Mittel- und Unterläufen von Fliessgewässern. Aus diesem Grund kann im Memolog ML-3 der Firma <<KERN die Dichte softwaremässig auf einen bestimmten Wert eingestellt werden, oder sogar kontinuierlich gemessen und kompensiert werden.

2.2.3.2. Löss

Löss ist in Gletscherflüssen zu finden. Es sind feinste Staubteilchen, welche die typisch milchige Farbe verursachen.

2.2.3.3. Sand und Erde

Diese sind vornehmlich nach Gewittern und Regenperioden im Wasser zu finden. Sie stellen eine nichtreproduzierbare Störung der Messung dar, da ihr Anteil stark schwankt.

2.2.4. Kompressibilität

Man versteht darunter das Verhältniss der relativen Volumenänderung zur erforderlichen Druckänderung [KUCH88].

$$k = - \frac{dV}{V} dp$$

oder

$$k = - \frac{DV}{V} Dp$$

Es kann somit auf die Dichte r in einer gewissen Tiefe h umgerechnet werden:

$$r = r_0 + k * r_0 * h * g$$

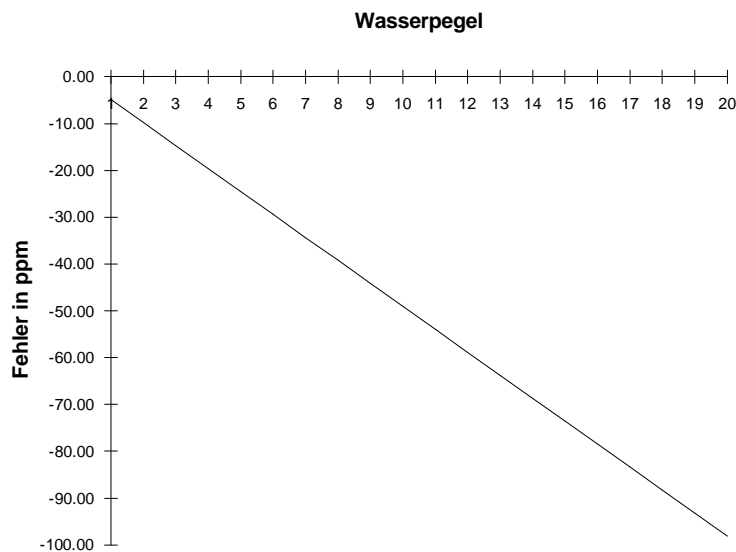
Die Kompressibilität ist zudem noch geringfügig Druck- und Temperaturabhängig. Für Wasser gilt [KUCH88]:

$$k = 0.50 \quad @ \quad 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$k = 0.53 \quad @ \quad 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Nachfolgend die tabellierten Werte bei 20°C, $\rho_0 = 998.206$, $\kappa = 5.00 * 10^{-10}$:

Dichte in Abhängigkeit der Tiefe			
h	r	Fehler	Fehler
[m]	[kg / m ³]	[ppm]	[mm]
1	998.210895	-4.90	0.00
2	998.215789	-9.81	-0.02
3	998.220684	-14.71	-0.04
4	998.225578	-19.61	-0.08
5	998.230473	-24.52	-0.12
6	998.235367	-29.42	-0.18
7	998.240262	-34.32	-0.24
8	998.245156	-39.23	-0.31
9	998.250051	-44.13	-0.40
10	998.254945	-49.03	-0.49
11	998.25984	-53.94	-0.59
12	998.264734	-58.84	-0.71
13	998.269629	-63.74	-0.83
14	998.274523	-68.65	-0.96
15	998.279418	-73.55	-1.10
16	998.284312	-78.45	-1.26
17	998.289207	-83.36	-1.42
18	998.294102	-88.26	-1.59
19	998.298996	-93.16	-1.77
20	998.303891	-98.07	-1.96



2.3. Fallbeschleunigung

Die Fallbeschleunigung g ist der zweite Parameter in der Druckformel. Dieser ist ebenfalls nicht konstant. Die Fallbeschleunigung folgt aus dem Gravitationsgesetz [DMK/DPK]:

Wenn

- F Gravitationskraft (gegenseitige Anziehungskraft zweier Körper) in [N]
- m1 Masse des Körpers 1 in [kg] (Erde)
- m2 Masse des Körpers 2 in [kg] (Wasser)
- r Abstand der Schwerpunkte der zwei Körper in [m]
- G Gravitationskonstante = $6.673 * 10^{-11} \text{ N} * \text{m}^2 / \text{kg}^2$

$$F = G (m1 * m2 / r^2)$$

Nun sind nach dem Wechselwirkungsgesetz (Newton) die Gravitationskraft **F** entgegengesetzt gleich gross wie die Gewichtskraft **m*g**

$$F_{12} = -F_{21}$$

oder

$$m_2 * g = G (m_1 * m_2 / r^2)$$

Hieraus folgt nun

$$g = G (m_1 / r^2)$$

Somit ist also die Fallbeschleunigung abhängig vom Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt. Das bedeutet, dass die Höhe über Meer und die geodätische Breite einer Messstelle Einfluss haben auf die Beziehung zwischen Druck und Pegel. Es wurde zudem festgestellt, dass die Fallbeschleunigung nicht überall gleich gross ist. Sie hängt ab von der geologischen Beschaffenheit des Untergrundes und ist zum Beispiel im Tessin etwas grösser als in Bern. Diese Abweichung kann aber nur experimentell ermittelt werden und ist für unsere Zwecke zu vernachlässigen.

2.3.1. Geographische Lage

Die geodätische Breite des Standortes spielt eine wesentliche Rolle. Da die Erde ein Ellipsoid ist, muss ein Korrekturfaktor eingeführt werden [DMK/DPK].

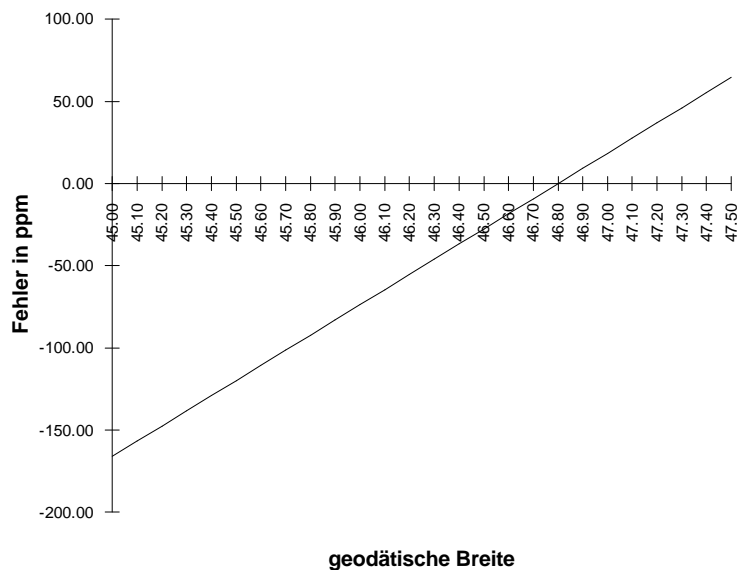
Wenn

g	Fallbeschleunigung am fraglichen Ort
k	$5.3 * 10^{-3}$
φ	geod. Breite in Grad
g_0	978.03 (g am Äquator)

$$g = (1 + k * \sin^2 j) * g_0$$

Die so errechneten Werte ergeben folgende Abweichungen:

Fallbeschleunigung			
Reduziert auf Meereshöhe			
geo. Breite	g	Fehler	Fehler bei 4m
[°]	[m / s ²]	[ppm]	[mm]
00.00	978.030	-2808.49	-11.23
10.00	978.186	-2649.12	-10.60
20.00	978.636	-2190.24	-8.76
30.00	979.326	-1487.21	-5.95
40.00	980.172	-624.80	-2.50
45.00	980.622	-165.93	-0.66
45.10	980.631	-156.70	-0.63
45.20	980.640	-147.48	-0.59
45.30	980.649	-138.26	-0.55
45.40	980.658	-129.03	-0.52
45.50	980.667	-119.81	-0.48
45.60	980.676	-110.59	-0.44
45.70	980.685	-101.36	-0.41
45.80	980.694	-92.14	-0.37
45.90	980.703	-82.92	-0.33
46.00	980.712	-73.70	-0.29
46.10	980.721	-64.49	-0.26
46.20	980.730	-55.27	-0.22
46.30	980.739	-46.05	-0.18
46.40	980.748	-36.84	-0.15
46.50	980.757	-27.63	-0.11
46.60	980.766	-18.42	-0.07
46.70	980.775	-9.21	-0.04
46.80	980.785	0.00	0.00
46.90	980.794	9.21	0.04
47.00	980.803	18.41	0.07
47.10	980.812	27.61	0.11
47.20	980.821	36.81	0.15
47.30	980.830	46.00	0.18
47.40	980.839	55.20	0.22
47.50	980.848	64.39	0.26



2.3.2. Lage über dem Meeresspiegel

Da die Messstationen ebenfalls in der Höhenlage differieren, ist auch diese Beeinflussung auf die Fallbeschleunigung zu berücksichtigen [DMK/DPK].

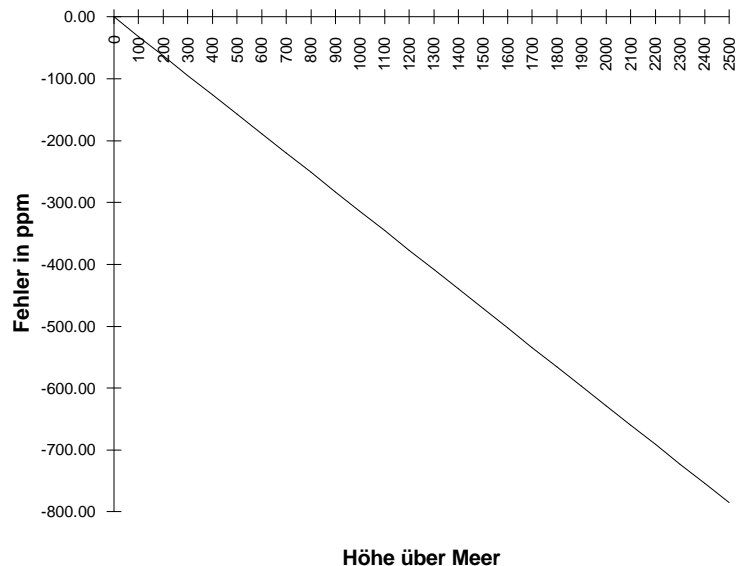
Wenn

- g Fallbeschleunigung am fraglichen Ort
- h Höhe über Meer in [m]
- k1 $5.3 \cdot 10^{-3}$
- k2 $-3.15 \cdot 10^{-7}$
- φ geod. Breite in Grad (46°)
- g_0 978.03 (g am Äquator)

$$g = (1 + k1 \cdot \sin^2 j + k2 \cdot h) \cdot g_0$$

Um eine klare Übersicht zu erlangen, sind hier die Werte angegeben, die ein und demselben Ort entsprechen. Es wurde lediglich die Höhe über Meer variiert. Die Breite welche gewählt wurde ist $46^\circ 0'$ nördl. Breite, was genau Lugano entspricht. Die Tabelle ist zudem in Dezimalbrüchen anstelle von Winkelminuten gehalten.

Fallbeschleunigung			
Auf 46° nördl. Breite			
Höhe ü.M.	g	Fehler	Fehler bei 4m
[m]	[m / s ²]	[ppm]	[mm]
0	980.7122	0.00	0.00
100	980.6814	-31.41	-0.13
200	980.6506	-62.83	-0.25
300	980.6198	-94.24	-0.38
400	980.589	-125.66	-0.50
500	980.5582	-157.07	-0.63
600	980.5274	-188.48	-0.75
700	980.4966	-219.90	-0.88
800	980.4658	-251.31	-1.01
900	980.435	-282.72	-1.13
1000	980.4042	-314.14	-1.26
1100	980.3733	-345.55	-1.38
1200	980.3425	-376.97	-1.51
1300	980.3117	-408.38	-1.63
1400	980.2809	-439.79	-1.76
1500	980.2501	-471.21	-1.88
1600	980.2193	-502.62	-2.01
1700	980.1885	-534.04	-2.14
1800	980.1577	-565.45	-2.26
1900	980.1269	-596.86	-2.39
2000	980.0961	-628.28	-2.51
2100	980.0653	-659.69	-2.64
2200	980.0345	-691.10	-2.76
2300	980.0036	-722.52	-2.89
2400	979.9728	-753.93	-3.02
2500	979.942	-785.35	-3.14



3. NICHTREPRODUZIERBARE MESSFEHLER

3.1. Wassertemperatur

Wie oben beschrieben, hat die Wassertemperatur einen Einfluss auf die Dichte und somit auf den resultierenden Druck. Um diesen Fehler zu reduzieren, resp. völlig auszuschalten, wird im Memolog ML-3 der Firma <<KERN die Wassertemperatur gemessen und der Pegel um den entsprechenden Faktor kompensiert.

Diese Kompensation ist allerdings nur in Gewässern mit annähernd homogener Temperaturverteilung anzuwenden. Dies ist in Grund- und Fließgewässern gut angenähert, jedoch in stehenden Gewässern nur in sehr engen Grenzen der Fall.

3.2. Wasserqualität

Um diesen Einfluss auf die Messung auszuschalten, müsste die Dichte des Wassers kontinuierlich (während der Messung) gemessen werden.

4. BEISPIELE

4.1. Vergleich Basel - Lugano

Aufgrund der verschiedenen geodätischen Breiten der beiden Orte entsteht eine Differenz bei der Pegelmessung. Diese Differenz soll errechnet werden.

Daten der Messtation Lugano:
- Breite: 46° 00'
- Höhe: 271 m ü.M.

Daten der Messtation Basel:
- Breite: 47° 38'
- Höhe: 260 m ü.M.

Es werden an beiden Orten <<Kern- Sonden verwendet, welche bei 17°C geeicht wurden.

Es wird angenommen, dass das Wasser an beiden Orten rein, die Temperatur konstant 17°C und die Dichte somit 998.776 kg / m³ ist. Weiter nehmen wir an, dass die Sonde bei einer Druckdifferenz von 99.8206 mbar = 9982.06 Pa eine Stromänderung von 4 mA zur Folge hat. Dies folgt aus der Spezifikation, wonach 0 m WS = 4 mA, 4 m WS = 20 mA, wobei hier rein die Steigung eine Rolle spielt, die Absolutwerte jedoch unwichtig sind. Diese können auch von Sonde zu Sonde schwanken und sind an den <<Kern- Geräten einstellbar. Ebenfalls die Steilheit der Messkurve wird an den Geräten gemäss Sonden- Eichprotokoll eingestellt.

Durch die oben durchgeführten Rechnungen ergeben sich die folgenden Abweichungen, wenn die geodätische Breite nicht kompensiert wird:

$$p = t * \rho * g$$
$$g = (1 + k1 * \sin^2 \varphi + k2 * h) * g0$$

$$p = t * \rho * g0 * (1 + k1 * \sin^2 \varphi + k2 * h)$$

g Fallbeschleunigung am fraglichen Ort
h Höhe über Meer in [m]
k1 5.3 * 10⁻³
k2 -3.15 * 10⁻⁷
 φ geod. Breite in Grad
g0 978.03 (g am Äquator)
t Tiefe des Wassers

Nun können die konkreten Werte eingetragen werden, was ergibt:

$$\text{Lugano: } p = 4 * 998.776 * 9.7803 * (1 + 5.3 * 10^{-3} * \sin 46 * \sin 46 - 3.15 * 10^{-7} * 271) = 39177.14 \text{ Pa}$$
$$39177.14 \text{ Pa} = 15.699 \text{ mA} + 4 \text{ mA} = 19.699 \text{ mA} = 3.92475 \text{ m}$$

$$\text{Basel: } p = 4 * 998.776 * 9.7803 * (1 + 5.3 * 10^{-3} * \sin 47,5 * \sin 47,5 - 3.15 * 10^{-7} * 260) = 39182.68 \text{ Pa}$$
$$39182.68 \text{ Pa} = 15.701 \text{ mA} + 4 \text{ mA} = 19.701 \text{ mA} = 3.92525 \text{ m}$$

Die Differenz beträgt demnach 0.5 mm. Es ist aber zu beachten, dass eine Sonde, welche in der Nähe des Einsatzortes geeicht wird, einen wesentlich genaueren Absolutwert abgibt, als eine Sonde, welche in Norwegen geeicht wurde und in Sizilien eingesetzt wird.

4.2. Vergleich Oberaarsee- Brienersee

Bei diesem Beispiel fällt die geodätische Breite nicht ins Gewicht. Was aber zu Differenzen führt, ist die Höhe über Meer.

Daten der Messtation Oberaarsee:

- Breite: 46° 55'
- Höhe: 2303 m ü.M.

Daten der Messtation Brienzensee:

- Breite: 46° 75'
- Höhe: 564 m ü.M.

Es werden an beiden Orten <<Kern- Sonden verwendet, welche bei 17°C geeicht wurden.

Es wird angenommen, dass das Wasser an beiden Orten rein, die Temperatur konstant 17°C und die Dichte somit 998.776 kg / m³ ist. Weiter nehmen wir an, dass die Sonde bei einer Druckdifferenz von 99.8206 mbar = 9982.06 Pa eine Stromänderung von 4 mA zur Folge hat. Dies folgt aus der Spezifikation, wonach 0 m WS = 4 mA, 4 m WS = 20 mA, wobei hier rein die Steigung eine Rolle spielt, die Absolutwerte jedoch unwichtig sind. Diese können auch von Sonde zu Sonde schwanken und sind an den <<Kern- Geräten einstellbar. Ebenfalls die Steilheit der Messkurve wird an den Geräten gemäss Sonden- Eichprotokoll eingestellt.

Durch die oben durchgeführten Rechnungen ergeben sich die folgenden Abweichungen, wenn die Höhe über Meer nicht kompensiert wird:

$$p = t * \rho * g$$
$$g = (1 + k1 * \sin^2 \varphi + k2 * h) * g0$$

$$p = t * r * g0 * (1 + k1 * \sin^2 j + k2 * h)$$

g	Fallbeschleunigung am fraglichen Ort
h	Höhe über Meer in [m]
k1	5.3 * 10 ⁻³
k2	-3.15 * 10 ⁻⁷
φ	geod. Breite in Grad
g0	978.03 (g am Äquator)
t	Tiefe des Wassers

Nun können die konkreten Werte eingetragen werden, was ergibt:

$$\text{Oberaar: } p = 4 * 998.776 * 9.7803 * (1 + 5.3 * 10^{-3} * \sin 46.55 * \sin 46.55 - 3.15 * 10^{-7} * 2303) = 39154.11 \text{ Pa}$$
$$39154.11 \text{ Pa} = 15.689 \text{ mA} + 4 \text{ mA} = 19.689 \text{ mA} = 3.92225 \text{ m}$$

$$\text{Brienz: } p = 4 * 998.776 * 9.7803 * (1 + 5.3 * 10^{-3} * \sin 46.75 * \sin 46.75 - 3.15 * 10^{-7} * 564) = 39176.24 \text{ Pa}$$
$$39176.24 \text{ Pa} = 15.699 \text{ mA} + 4 \text{ mA} = 19.699 \text{ mA} = 3.92475 \text{ m}$$

Die Differenz beträgt demnach 2.5mm. Diese Differenz fällt als nur ins Gewicht, wenn eine Auflösung von 1mm gewünscht wird.

5. QUELLEN

[DMK/DPK]	Formeln und Tafeln Mathematik - Physik, 3. Auflage 1984, Orell Füssli
[KUCH88]	Taschenbuch der Physik, H. Kuchling, 10. Auflage 1988, Verlag Harry Deutsch
[JOGER89]	Praktische Ökologie, Ulrich Joger, 1. Auflage 1989, Verlag Sauerländer
[RICKLI90]	Geologie- Skript, Beat Rickli, 1. Auflage 1990